

1/3/10 Θεωρία Χρονικά Ανεξάρτητων Διαταραχών: ①

I^{us} τάγης ^{Σταθμών} στην Εξίσωση (6es. 504)
 (Μη) εκφυλισμένες στάθμες
 (505)

$$H = H_0 + \delta V$$

↑ ↑
 αδιατ. Διαταραχή
 μέρος

$$H_0 \Psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \Psi_n^{(0)}$$

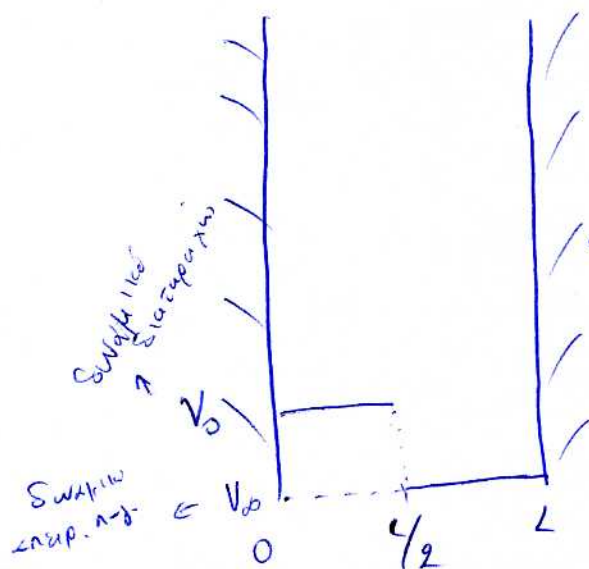
$$E_n^{(1)} = \int dV [\Psi_n^{(0)}]^* \delta V \Psi_n^{(0)}$$

505*

505
Ασκηση: Υπολογισμός της I^{us} τάγης διαρρύθμισης της
 ειοενέργειας ενός απερόβαλου πυλάδιου, με χρήση
 θεωρίας διαταραχών I^{us} τάγης, όταν το απερόβατο
 περιγράφεται από δυναμικό της μορφής:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 & \text{για } 0 < x < L/2 \\ V(x) &= 0 & \text{για } L/2 < x < L \\ V(x) &= \infty & \text{για διαφορετικά} \end{aligned}$$

απέρ. πυλάδι:



Διαταραχή:

$$\delta V = \begin{cases} V_0 & 0 < x < L/2 \\ 0 & \text{διατ.} \end{cases}$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_\infty(x)$$

↓
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$

→

9a Sinus

$$\psi_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 n^2}{2mL^2} \cdot n^2$$

(Η γνωστή ενέργεια είναι: $E_n^{(0)} + \delta V$)

$$E_n^{(1)} = \int_0^{L/2} \underbrace{dx}_{\text{αφαιρ. ενέργειας}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{αφαιρ. ενέργειας}} \cdot V_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \left(\frac{2}{L} V_0\right) \int_0^{L/2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

①
1/2 (αφαιρ. ενέργειας)

• $\cos(A+B) = \cos(A) \cdot \cos(B) - \sin(A) \cdot \sin(B)$

• $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

• $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

*

$$\Rightarrow \frac{2}{L} V_0 \left[\int_0^{L/2} \frac{1}{2} dx - \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \frac{2}{L} V_0 \left[\frac{L}{4} - \frac{1}{2} \frac{L}{2n\pi} \left[\sin \frac{2n\pi x}{L} \right]_0^{L/2} \right]$$

$$= \frac{V_0}{2} - 0 = \frac{V_0}{2}$$

Επομένως:

$$E_n^{(1)} = \frac{V_0}{2}$$

Γέφυρα:

$$Εξίσωση \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + g \cdot x^4$$

N.B. η 1^η τάξη διαρρέων στην ενέργεια του ελαστικού ~~καταστάσης~~ ^{ελαστικού} ~~καταστάσης~~ ^{ελαστικού}

Αριθμοποιώντας ως διατάραχο ~~έπος~~ ^{έπος} ~~δυναμικό~~ ^{δυναμικό} ~~ω~~ ^ω
 δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή $\Rightarrow$ αυτό δ στα όρια
 όπου πρέπει να το συμπεριλάβουμε

ΛΥΣΗ:

$$\psi_n^{(1)} = \int dV [\psi_n^{(0)}]^* \delta V \cdot \psi_n^{(0)}$$

$$= -\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2} k x^2 + \int dx \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-x^2} g x^4$$

$$= -\frac{k}{2\sqrt{n}} \int x^2 e^{-x^2} dx + \frac{g}{\sqrt{n}} \int x^4 e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{k}{2\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{g}{\sqrt{n}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{1}{4} (3g - k)$$

Άρα:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + g x^4 - \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2}_{H_0} + \underbrace{g x^4 - \frac{1}{2} k x^2}_{\delta V}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cdot e^{-x^2/2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)}{(2n)^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \cdot (4n)^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

• Έστω $V = -e z E_0$

N.B. η 1^η τάξη διαρρύθμισης ^{στην ενέργεια} για την κατ. 2p ω ατ. H.

↓
αυτό σε άδεια
φέρεται να
δεν φαίνει
τίποτα για
MH ^{εξφλ.}
καταστ.

50% Για την κατάσταση 1s του ατόμου H είναι

έχουμε: $V = -e z E_0$

ΛΥΣΗ:

$\Psi_{1s} = \Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}} \quad \text{①} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ακτίνα} \\ \text{Bohr} \end{array} \right\} \text{ΔΙΝΕΤΑΙ}$
 $\hookrightarrow a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$

50% Η ισοτιμωμένη III
έχει ΜΟΝΑΔΕΣ ...

$\left(\left(\frac{1}{\mu\text{m}} \right)^{3/2} \right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\text{όγκου}}} \right)$

① = $\int_0^\infty \dots$

Αν θέλω να βρω
τη διαρρύθμιση, να
πάρω dV & dx

$E_{100}^{(1)} = \int dV \Psi_{100}^*(r) (-e z E_0) \Psi_{100}(r)$
↑ r cos θ

6 φαρ. 6 φέρει: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$
 50% $\begin{array}{l} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{array}$

50%

$$\langle 1s | 1s \rangle = \int dV \Psi_{1s}^*(r) \delta V \Psi_{1s}(r) = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\pi} \frac{1}{a_0^3} e^{-2r/a_0} (-e E_0 r \cos \vartheta)$$

$$= -\frac{e E_0}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr \int_0^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

(κατά την οποία
ζέρωκε και
το θ παρέρωκε
0)

0



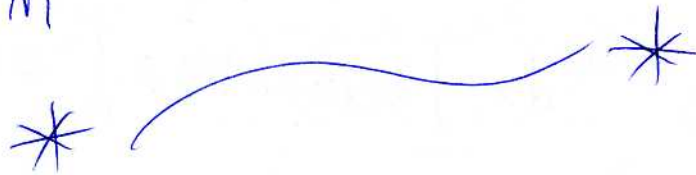
$$\int_0^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2\vartheta) d\vartheta = -\frac{1}{4} [\cos 2\vartheta]_0^\pi = 0$$

(Ομπία διαπαράχυν
τενορ)

Επικράτης

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΑΒΟΛΕΝ

$\hat{M}$ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ



Χρησιμοποιείστε
να βρείτε προ
βλεπτικά τα αποτελ
εξιστάθη

1^ο Βήμα:

Επίδοξη κυματοσυνάρτησης
Έστω $\Psi(\vec{r}, \lambda)$, λ : ελεύθερη παράμετρος.
 $\nearrow$
 βλ. ορίσματος
 ειν. η εύρεσή της

αυτο θα το κάνει
ο διδάσκων

καλύτερα να
κοινοποιήσω
αρχικά την
 $\Psi(\vec{r}, \lambda)$

2^ο Βήμα: Εύρεση μέσης τιμής της ενέργειας

$$\langle E \rangle = \langle H \rangle = E(\lambda)$$

3^ο Βήμα: Ελαχιστοποίηση της $\langle E \rangle$ ως προς την παράμετρο λ
 (η τιμή του λ που ελαχιστοποιεί την ενέργεια: λ_{min})

4^ο Βήμα: Εξομολογήματα = $E(\lambda_{min})$

Κυματοσυνάρτηση Οξείας Στάθης: $\Psi(\vec{r}, \lambda_{min})$

όβλημα L^0 : (παλιό θέμα)

(7)

- 1D) Να υπολογιστεί με χρήση της θεωρίας μεταβολών την ενέργεια της διεγερμένης κατάστασης σε δυνάμεις: $V(x) = g \cdot x^4$. Χρήση ~~παλαιά~~ της εξής δοκιμαστικής κυματοσυνάρτησης: $\Psi(x, \lambda) = N \cdot e^{-\lambda x^2/2}$ (N, λ : προφαντικά θετικοί)

ΛΥΣΗ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2a)^m} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad m=0, 1, 2, 3, \dots$$

- Κατανομοποίηση κυματοσυνάρτησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\Psi(x, \lambda)|^2 = 1 \Rightarrow N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \Rightarrow N^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

$\left(\frac{1}{(\mu \text{ίκρος})^2} : \text{μονάδες του } \lambda \right)$
 $\left(\frac{1}{\sqrt{\mu \text{ίκρος}}} : \text{μονάδες του } N \right)$

- Υπολογισμός $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

- Υπολογισμός $\langle V \rangle$ άμεσα:

$$\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x, \lambda) V(x) \Psi(x, \lambda) = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot e^{-\lambda x^2} x^4 =$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot g \cdot \frac{1 \cdot 3}{4\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \Rightarrow \langle V \rangle = \frac{3g}{4\lambda^2}$$

(μονάδες: $g \cdot (\mu \text{ίκρος})^4$)

- Υπολογισμός $\langle T \rangle$ έπειτα:

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, \lambda) \hat{T} \Psi(x, \lambda) dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi(x, \lambda) \frac{d^2 \Psi(x, \lambda)}{dx^2}$$

$$\star \frac{d\Psi}{dx} = -\lambda N x e^{-\lambda x^2/2}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = \lambda^2 N x^2 e^{-\lambda x^2/2} - N \lambda e^{-\lambda x^2/2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} N^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} (-2\lambda) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x^2} dx \right] = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} N^2 \left[-\lambda \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \lambda^2 \cdot \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(\frac{1}{2}\lambda - \lambda \right) \\ \langle T \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\lambda}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\langle T \rangle = \frac{\lambda \cdot \hbar^2}{4m}}\end{aligned}$$

Άρα: $\langle E \rangle = \frac{\lambda \hbar^2}{4m} + \frac{3g}{4\lambda^2} = E(\lambda)$

• Εύρεση $\lambda_{\min}$: η τιμή του λ που ελαχιστοποιεί συνάρτηση 80% η κερδοφορία επί λ

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4m} - \frac{3}{4} g \frac{2}{\lambda^3} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4m} = \frac{6g}{4\lambda^3} \Rightarrow \lambda^3 = \frac{6gm}{\hbar^2}$$

$$\boxed{\lambda_{\min} = \left(\frac{6gm}{\hbar^2} \right)^{1/3}}$$

• $E(\lambda_{\min}) = E_{\text{εξ. σταθ.}} = \frac{\hbar^2}{4m} \frac{6^{1/3} g^{1/3} m^{1/3}}{\hbar^{2/3}} + \frac{3g}{4} \frac{\hbar^{4/3}}{6^{2/3} g^{2/3} m^{2/3}} =$

$$= \left(\frac{6^{1/3}}{4} + \frac{3}{4 \cdot 6^{2/3}} \right) \cdot \frac{g^{1/3} \cdot \hbar^{4/3}}{m^{2/3}}$$

Πρόβλημα 2^ο:

Ίδια εκφώνηση με το 1^ο πρόβλημα

Αλλά $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$

Λύση:

• Κατανοούμε $\rightarrow N^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha}}$

• $\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{4m}$ (αφού δεν έχω αλλαγή του ψ)

• $\langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{2} k x^2 \cdot N^2 e^{-\lambda x^2} = \frac{k N^2}{2} \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} = \frac{k}{4\lambda}$

• $\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{4m} + \frac{k}{4\lambda} = E(\lambda)$

• $\frac{dE}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{4m} - \frac{k}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{k \cdot m}{\hbar^2} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{\sqrt{k \cdot m}}{\hbar}$

• $E(\lambda_{\min}) = \frac{k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \hbar^2}{4 m \hbar} + \frac{k \cdot \hbar}{4 k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}} = \frac{\hbar \sqrt{k}}{2 \sqrt{m}} \rightarrow \text{Εξαρ. γραδ.}$
 αλλιώς approx. ταλαντώσι
 ($E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$)

ΑΣΚΗΣΗ: (αξιόδετα)

Χρησιμοποιήστε θεωρία Μεταβολών (Παραλλαγή)

για τον υπολογισμό της Εξερ. σταθ. ενός σωματίου

μάζας m & κεντρικό δυναμικό $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$

με λ, k : θετική πραγματική σταθερά.

Δοκιμάστε την κυματοψήφου: $\Psi(r, \theta, \varphi) = N \cdot e^{-\lambda r}$

$$\left(\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \right)$$

μονάδες λ^3 στην λ^3

ΛΥΣΗ:

4π

αν λ εξαρτάται από τις μονάδες

$$e^{-2\lambda r} = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$[-\cos \theta]_0^\pi = -(-2) = 2$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \int_0^\infty r^2 dr = 1$$

$$N^2 = \frac{\lambda^3}{\pi}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\sqrt{\lambda^3}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi N^2 \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = 1 \Rightarrow$$

2) Έρευνα $\langle E \rangle = \langle V \rangle + \langle T \rangle$

$$\langle V \rangle = \int dV \Psi^* V \Psi = \frac{1}{\pi} \frac{k}{2} \int_0^\infty dr \cdot r^2 r^2 e^{-2\lambda r} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\lambda^3 k \int_0^\infty r^4 e^{-2\lambda r} dr = \frac{2\lambda^3 k}{1} \frac{4!}{(2\lambda)^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{\lambda^3}{\lambda^5} k$$

$$\langle V \rangle = \frac{3}{2} \frac{k}{\lambda^2}$$

$$\langle T \rangle = \int dV \Psi^* \hat{T} \Psi = (\text{ενέργεια κίνησης})$$

$$\langle T \rangle = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\left(\text{with } \nabla^2 \Psi = 0 \right)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\sqrt{\frac{\lambda^3}{n}} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot e^{-\lambda r}) =$$

$$= -\lambda \sqrt{\frac{\lambda^3}{n}} \cdot \frac{1}{r^2} (2r e^{-\lambda r} - \lambda r^2 e^{-\lambda r})$$

$$= -\lambda \sqrt{\frac{\lambda^3}{n}} \left(\frac{2}{r} e^{-\lambda r} - \lambda e^{-\lambda r} \right)$$

$\lambda \rho \lambda$:

$$\langle T \rangle = +\lambda \frac{\lambda^3}{\pi} \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r^2} 2r e^{-2\lambda r} - \int_0^\infty \lambda r^2 e^{-2\lambda r} \frac{r^2}{r^2} dr$$

$$= \frac{4\lambda^4 \hbar^2}{m} \int_0^\infty r e^{-2\lambda r} dr - \frac{2\lambda^5 \hbar^2}{m} \int_0^\infty r^2 e^{-2\lambda r} dr$$

$$= \frac{4\lambda^4 \hbar^2}{m} \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{2\lambda^5 \hbar^2}{m} \cdot \frac{2}{8\lambda^3} = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{m} - \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m}$$

Ενοφέως:

$$\langle E \rangle = \frac{3k}{2\lambda^2} + \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m} = \mathcal{E}(\lambda)$$

3) Εύρεση $\lambda_{\min}$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{3k}{2} (-2) \frac{1}{\lambda^3} + \frac{2\lambda \hbar^2}{2m} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda \hbar^2}{m} = \frac{3k}{\lambda^3} \Rightarrow \lambda^4 = \frac{3km}{\hbar^2} \Rightarrow \lambda_{\min} = \sqrt[4]{\frac{3km}{\hbar^2}}$$

$$4) E_{\text{εφ. σταθ}} = \mathcal{E}(\lambda_{\min}) = \frac{3k\hbar}{2\sqrt{3km}} + \frac{\sqrt{3km} \hbar^2}{\hbar^2 2m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar$$

$\lambda \rho \lambda$

$$E_{\text{εφ. σταθ}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar$$

ΑΣ ΚΗΣΗ:

Να βρούμε την Εξοφ. τιμή του λ όταν:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}} e^{-\lambda r} \quad \& \quad V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

ΛΥΣΗ:

1) Κατωφλιό είναι $\leadsto$ όπως πριν

2) Είρξεν $\langle E \rangle = \langle V \rangle + \langle T \rangle$
 (Note: $\langle V \rangle$ is circled, and a green arrow points to it with the text "μικρότερη διαφορά")

$$\langle T \rangle = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m}$$

$$\langle V \rangle = \int_0^\infty dV \Psi_{(r, \theta, \varphi)}^* V \Psi_{(r, \theta, \varphi)} = \frac{\lambda^3}{\pi} e^2 4\pi \cdot \int_0^\infty dr \cdot r^2 \frac{1}{r} e^{-2\lambda r} = -4\lambda^3 e^2 \int_0^\infty r dr e^{-2\lambda r}$$

$$\langle V \rangle = -2\lambda^3 e^2 \frac{1}{2\lambda^2} = -e^2 \lambda$$

$$\text{Επομένως} \quad \langle E \rangle = \frac{\lambda^2 \hbar^2}{2m} - e^2 \lambda = \mathcal{E}(\lambda)$$

$$3) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda \hbar^2}{m} - e^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{\min} = \frac{e^2 m}{\hbar^2}$$

$$4) \mathcal{E}(\lambda_{\min}) = \frac{e^4 m^2 \hbar^2}{\hbar^4 \cdot 2m} - \frac{e^4 m}{\hbar^2} = \frac{e^4 m}{2\hbar^2} - \frac{e^4 m}{\hbar^2} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2}$$

Εξοφ. τιμή

ΤΕΛΟΣ
 Θεωρίας
 Μεταβολών

ΤΑΥΤΟΣΗΜΑ ΣΥΜΑΤΙΑΣ

→ τα σωματ. που είναι ίδια ταξιθ. τους
σε μπορ. να τα ξεχωρίσωτε π.χ. $2e^-$

Χαρακτηριστικά:

- 1) Spin → σωματ. με ημιακέραιο spin ($= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ή $\frac{\Sigma \hbar}{2}$)
(ΦΕΡΜΙΟΝΙΟ)
→ σωματ. με ακέραιο spin ($= 1, 2, 3, \dots$)
(ΜΠΟΖΟΝΙΑ)

• Γενικευμένη Αρχή του Pauli

Τα σωματ. κατά τάξουκα, σε 2 κατηγορίες

Φερμιόνα

- έχω ολικές κ.σ.σ.σ.
αντιμετρικές

Μποζόνα

- έχω ολικές κ.σ.σ.σ.
συμμετρικές (→ ως προς την εναλλαγή των σωματινών.)

► ΟΛΙΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ = (ΧΩΡΙΚΗ ΚΥΜΑΤ) $\otimes$ (ΚΥΜΑΤ. SPIN)